GRADO EN ESTUDIOS DE ARQUITECTURA

COLECCIÓN DE EXÁMENES

1er curso

Academia de Ingenierías y Arquitectura

Desde 1998 ayudándote en tus estudios

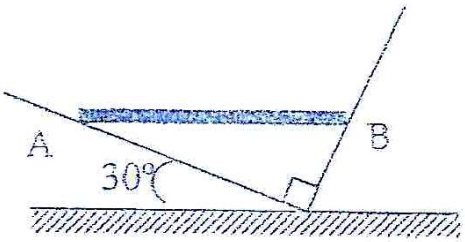
Academia de Ingenierías y Arquitectura

FÍSICA I. EXAMEN *i+A* ENERO 2016
GRADO EN ESTUDIOS DE ARQUITECTURA

Problema 1 (Ex. 14/09/2011): La barra de la figura de masa *m=10 kg* y que mide *L=2m*, se coloca en posición horizontal, apoyándose en dos planos inclinados que forman entre sí un ángulo recto.

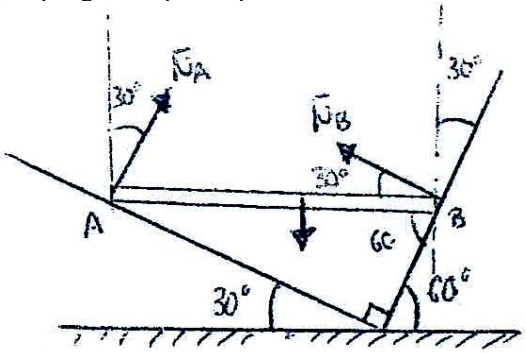
a) Cuando valen las reacciones en A y B suponiendo que las paredes son lisas.

b) Suponiendo que las superficies del apoyo A es lisa, calcula cuál es el mínimo coeficiente de rozamiento estático μ que debe existir en B para que la barra esté en equilibrio. ¿Cuánto valen las reacciones en A y B?



Solución:

a) Supongamos que las paredes son lisas.



I -

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_{Ax} = N_{Bx} \rightarrow N_A sen30 = N_B \cos 30$$

II - $$\sum F_y = 0 \rightarrow N_{Ay} + N_{By} = mg \rightarrow N_A \cos 30 + N_B sen30 = mg$$

III - $$\sum N_A = 0 \rightarrow mg\frac{L}{2} = N_B \cdot L \cdot sen30 \rightarrow \frac{1}{2}mg = N_B sen30 \rightarrow \boxed{N_B = mg}$$

Sustituyendo en I → $$N_A \frac{1}{2} = Mg\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \boxed{N_A = \sqrt{3}mg}$$

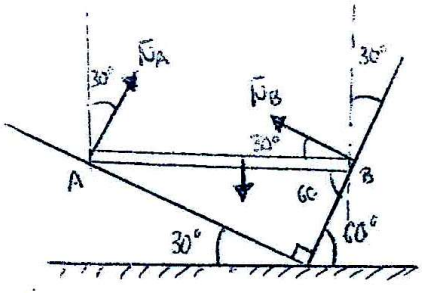
Sustituyendo en II → $$\sqrt{3}mg\frac{\sqrt{3}}{2} + mg\frac{1}{2} = mg$$

$$\frac{3}{2}mg + \frac{1}{2}mg = mg \rightarrow \frac{4}{2}mg = mg \rightarrow \boxed{2mg \neq mg}$$

A partir de los datos obtenidos y puesto que se tienen que cumplir las 3 ecuaciones de equilibrio llegamos a la conclusión de que NO es posible.

b)

Cuando hay fuerza de rozamiento en B



$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_A sen30 + F_{roz} sen30 = N_B \cos 30$$
$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_A \cos 30 + F_{roz} \cos 30 + N_B sen30 = mg$$

(momento respecto a B) $\rightarrow \sum N_B = 0 \rightarrow N_A \cos 30 \cdot L = mg\frac{L}{2} \rightarrow N_A = \frac{mg}{2}\frac{2}{\sqrt{3}} \rightarrow \boxed{N_A = \frac{mg}{\sqrt{3}}}$

$$\boxed{N_A = \frac{98}{\sqrt{3}} = 56{,}6N}$$

$$\left.\begin{aligned}\sum F_x \rightarrow \frac{1}{2}N_A + F_{roz}\frac{1}{2} = N_B\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow N_A + F_{roz} = \sqrt{3}N_B \\ \sum F_y \rightarrow N_A\frac{\sqrt{3}}{2} + F_{roz}\frac{\sqrt{3}}{2} + N_B\frac{1}{2} = mg \rightarrow N_A\sqrt{3} + F_{roz}\sqrt{3} + N_B = 2mg\end{aligned}\right\} \rightarrow \text{Sustituyendo } N_A \rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{mg}{\sqrt{3}} + F_{roz} = \sqrt{3}N_B \\ \frac{mg}{\sqrt{3}}\sqrt{3} + F_{roz}\sqrt{3} + N_B = 2mg\end{aligned}\right\} \begin{aligned}\frac{mg}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}N_B - F_{roz} \\ F_{roz}\sqrt{3} + N_B = mg\end{aligned} \rightarrow \text{2 ecuaciones y 2 incógnitas} \rightarrow$$

$$mg + F_{roz}\sqrt{3} + N_B = 2mg$$
$$F_{roz}\sqrt{3} + N_B = 2mg - mg$$
$$F_{roz}\sqrt{3} + N_B = mg$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{mg}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}N_B - F_{roz} \\ F_{roz}\sqrt{3} + N_B = mg\end{aligned}\right\} \rightarrow F_{roz} = \sqrt{3}N_B - \frac{mg}{\sqrt{3}}$$
$$\rightarrow \left(\sqrt{3}N_B - \frac{mg}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{3} + N_B = mg \rightarrow 3N_B - mg + N_B = mg \rightarrow$$
$$\rightarrow 3N_B + N_B = 2mg \rightarrow N_B = \frac{2mg}{4} \rightarrow \boxed{N_B = \frac{mg}{2} = 49N}$$

Sustituyendo en la Froz:

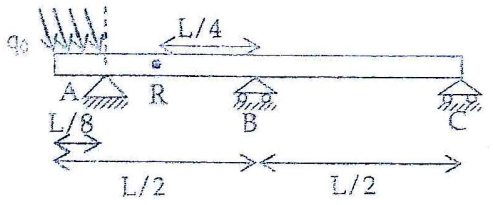
$$F_{roz} = \sqrt{3}\frac{mg}{2} - \frac{mg}{\sqrt{3}} = \frac{mg}{2\sqrt{3}} = \frac{49}{\sqrt{3}} = 28{,}3N$$

Como sabemos que:

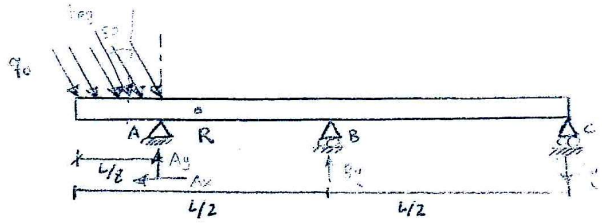
$$F_{roz} \le \mu N_B \rightarrow \frac{mg}{2\sqrt{3}} \le \mu\frac{mg}{2} \rightarrow \boxed{\mu \ge \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Problema 2. (Ex 14/09/2011) Sobre la viga de la figura, de longitud *L = 2m* y peso despreciable, actúa una fuerza distribuida dada por q_0*=1000 kg/m* en una dirección que forma 30º con la vertical.

a) Calcula las reacciones en los apoyos A, B y C, así como en la articulación R.
b) Considera ahora una sección Q, en el punto medio entre B y C. Calcula las fuerzas y los momentos internos en Q.



Solución:



La fuerza ditribuida

$F_{eq} = q_0 L = \left(1000\frac{kg}{m}\right)\frac{2}{8} = 250kg$ (Formando ángulo de 30 º con la vertical)

$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x - F_{eq\,x} = 0 \rightarrow A_x = F_{eq_x} \rightarrow A_x = 250 \cdot sen30 = \boxed{125kg = A_x}$ (I)

$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y - C_y - F_{eq\,y} = 0 \rightarrow A_y + B_y = C_y + F_{eq_y}$

$$A_y + B_y = C_y \cdot 250 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \boxed{A_y + B_y = C_y + 125\sqrt{3}} \text{ (II)}$$

$\sum N_A = 0 \rightarrow F_{eq\,y}\frac{L}{8}\frac{L}{2} + B_y\left(\frac{L}{4}+\frac{L}{8}\right) - C_y\left(L - \frac{L}{8}\right) = 0$

$$F_{eq\,y}\frac{L}{16} + B_y\frac{3L}{4} = C_y \cdot \frac{7L}{4} \rightarrow 250\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{L}{16} + B_y\frac{3L}{4} = C_y \cdot \frac{7L}{4}$$

$$\frac{125\sqrt{3}}{16} + B_y\frac{3}{4} = C_y\frac{7}{4} \rightarrow \boxed{125\sqrt{3} + B_y \cdot 12 = C_y \cdot 28} \text{ (III)}$$

Hay 3 ecuaciones y 4 incógnitas → Ya hemos usado una ecuación para calcular A_x. Luego nos quedan 2 ecuaciones y 3 incógnitas → tenemos que buscar otra → Luego "rompemos" el sistema por la articulación ´R´ y nos quedamos con la parte derecha.

$\sum N_R = 0 \rightarrow B_y \cdot \frac{L}{y} - C_y \cdot \frac{3L}{4} = 0 \rightarrow B_y - 3C_y = 0 \rightarrow \boxed{B_y = 3C_y}$ (IV) →

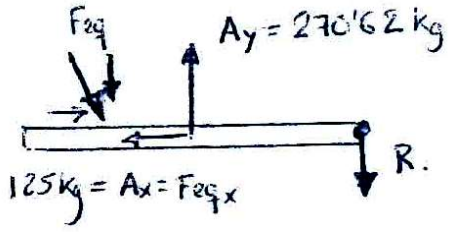
→ Sustituye en la ecuación III.

$125\sqrt{3} + 36C_y = 25C_y \rightarrow 125\sqrt{3} = -8C_y \rightarrow C_y = \frac{125\sqrt{3}}{-8} \rightarrow \boxed{C_y = -27{,}06\,Kg}$

Con la ecuación IV → $B_y = 3.C_y \rightarrow B_y = 3\cdot(-27{,}06) \rightarrow \boxed{B_y = -81{,}18\,Kg}$

De la ecuación II → $A_y = C_y + 125\sqrt{3} - B_y = -27{,}06 + 125\sqrt{3} - (-81{,}18) \Rightarrow \boxed{A_y = 270{,}62\,Kg}$

Para calcular el valor de la reacción en la articulación R, "abrimos" por R y nos quedamos en el lado izquierdo y tomamos momentos en R.



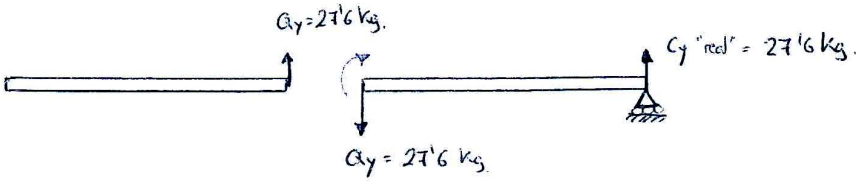
$\sum N_R = 0 \rightarrow F_{eq\,y} \cdot \left(\frac{3L}{16}\right) - A_y \cdot \frac{L}{8} = 0 \rightarrow F_{eq_y} \cdot \frac{3}{16} - A_y \cdot 2 = 0$

$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{eq\,y} + R = A_y \rightarrow R = A_y - F_{eq\,y} = 270{,}62 - 216{,}50 \Rightarrow R = 54{,}12\,Kg$

Solo vertical

Solo tenemos reacción vertical en R porque la parte horizontal de la carga es asumida toda por el apoyo A_x.

b)



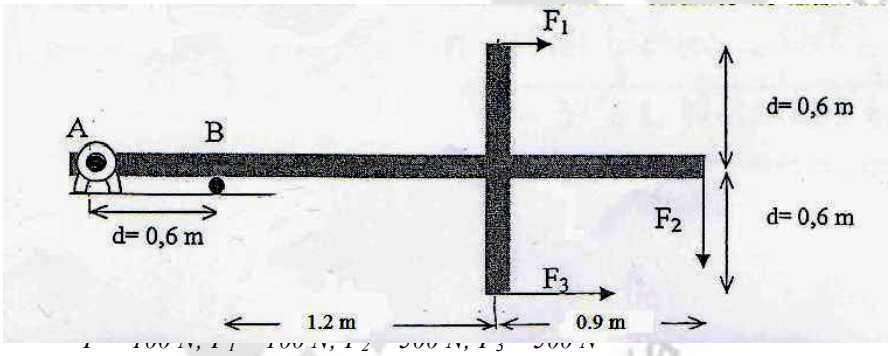
$$\sum N_a = 0 \rightarrow C_y \cdot \frac{L}{4} - N_q^* = 0$$

$$N_q^* = 27{,}6 \cdot \frac{L}{4} = 27{,}6 \cdot \frac{2}{4} = 13{,}8\, Kg.m$$

Problema 3 (Ex. Febrero 2014): El sólido rígido de la figura de peso P=100 N está en equilibrio. Está sometido a la acción de tres fuerzas de módulos F_1=100 N, F_2=500 N y F_3=500 N respectivamente. En los puntos A y B hay una articulación y un apoyo liso, respectivamente.

a) Obtened los valores de las fuerzas de reacción en los enlaces A y B.

b) ¿Existe una fuerza F que, aplicada en algún punto de la barra horizontal, contrarreste a las tres aplicadas? Si es así, determinad las componentes de dicha fuerza y su punto de aplicación.

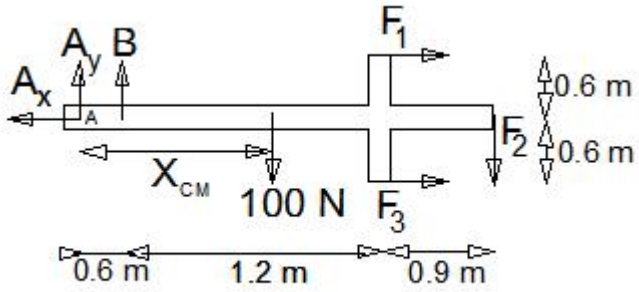


Solución:

a) En primer lugar calculamos el c.d.m. (punto donde aplicaremos el peso):

Por simetría: $Y_{CM} = 0\ m$

$$X_{CM} = \frac{M_{barra\ horizontal} \cdot 1.35 + M_{barra\ vertical} \cdot 1.8}{M_{barra\ horizontal} + M_{barra\ vertical}} = \frac{2.7 \cdot 1.35 + 1.2 \cdot 1.8}{2.7 + 1.2} = 1.49\ m$$



Sistema en equilibrio → $\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum \vec{N} = \vec{0} \end{cases}$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = \vec{0} \rightarrow F_1 + F_3 - A_x = 0 \rightarrow \boldsymbol{A_x = F_1 + F_3 = 100 + 500 = 600\ N}$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = \vec{0} \rightarrow A_y + B - 100 - F_2 = 0 \rightarrow \boldsymbol{A_y + B = 100 + F_2 = 600} \quad [1]$$

$$\sum \overrightarrow{N_A} = \vec{0} \rightarrow +B \cdot 0.6 - 100 \cdot 1.49 - F_2 \cdot 2.7 - F_1 \cdot 0.6 + F_3 \cdot 0.6 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow B \cdot 0.6 - 100 \cdot 1.49 - 500 \cdot 2.7 - 100 \cdot 0.6 + 500 \cdot 0.6 = 0 \rightarrow \boldsymbol{B = 2098.33 N}$$

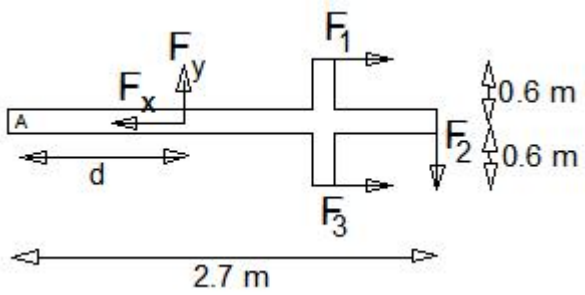
$$[1] \rightarrow \boldsymbol{A_y = 600 - B = 600 - 2098.33 = -14980.33\ N}$$

b) Si existe una fuerza, F, que aplicada en algún punto de la barra horizontal, contrarreste a las tres aplicadas, deberá cumplirse:

$$\begin{cases}\sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum \vec{N} = \vec{0}\end{cases}$$

$$\sum \vec{F_x} = \vec{0} \rightarrow F_x + F_1 + F_3 = 0 \rightarrow \boldsymbol{F_x = -F_1 - F_3 = -100 - 500 = -600\ N}$$

$$\sum \vec{F_y} = \vec{0} \rightarrow F_y - F_2 = 0 \rightarrow \boldsymbol{F_y = F_2 = 500\ N}$$



$$\sum \vec{N_A} = \vec{0} \rightarrow +500 \cdot d - F_2 \cdot 2.7 - F_1 \cdot 0.6 + F_3 \cdot 0.6 = 0 \rightarrow$$

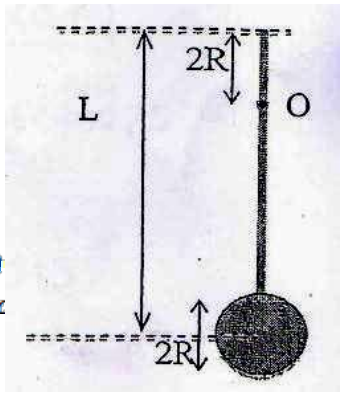
$$\rightarrow \boldsymbol{d = \frac{F_2 \cdot 2.7 + F_1 \cdot 0.6 - F_3 \cdot 0.6}{500} = \frac{500 \cdot 2.7 + 100 \cdot 0.6 - 500 \cdot 0.6}{500} = 2.22\ m}$$

Problema 4 (Ex. Febrero 2014) El péndulo de un reloj está formado por una varilla de M=500 g y L=40 cm de longitud y un disco de la misma masa y R=5 cm, tal y como se indica en la figura. El punto de suspensión O está a 10 cm del extremo de la varilla. Calculad:

a) La posición del centro de masas medida desde O.

b) El momento de inercia respecto de un eje perpendicular a la varilla y que pasa por O.

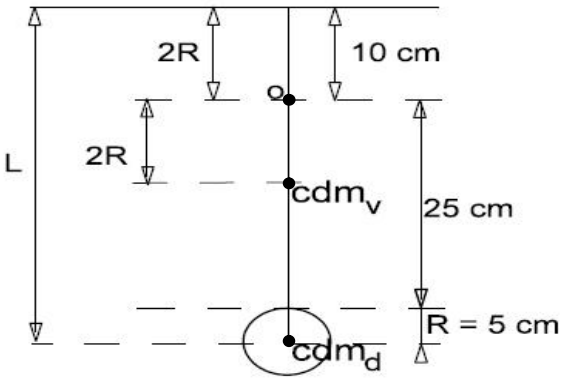
d) Si el péndulo se desvía 60º de la posición de equilibrio, calculad la velocidad angular de rotación cuando pasa por la posición de equilibrio.



Solución:

Varilla $\rightarrow \begin{cases} M = 500\ g \\ L = 40\ cm \end{cases}$ Disco$\rightarrow \begin{cases} M = 50 \\ R = 5\ c \end{cases}$

a)Posición del c.d.m. medido desde O:



$$(\mathbf{Y_{CM}})_{\mathbf{O}} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M+M}[M(L-2R) + M2R] = \frac{L}{2} = \frac{0.4}{2} = \mathbf{0.2\ m}$$

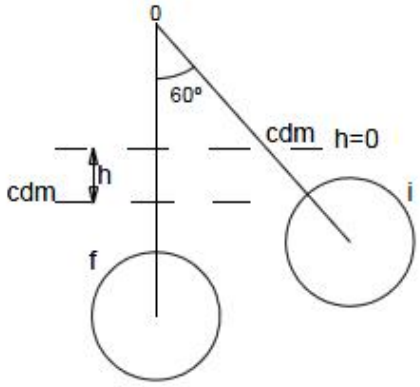
b) Para calcular el momento de inercia respecto de un eje perpendicular a la varilla y que pasa por O → $I_O = (I_{varilla})_O + (I_{disco})_O$

Utilizando el Teorema de Steiner: $I_O = I_{CM} + Md^2$:

$$\left.\begin{aligned}(I_{varilla})_O &= \frac{1}{12}ML^2 + M(0.1)^2 \\ (I_{disco})_O &= \frac{1}{2}MR^2 + M(0.3)^2\end{aligned}\right\} \rightarrow I_O = (I_{varilla})_O + (I_{disco})_O \rightarrow$$

$$\rightarrow \boldsymbol{I_O} = \frac{1}{12}\cdot 0.5\cdot 0.4^2 + 0.5\cdot 0.1^2 + \frac{1}{2}\cdot 0.5\cdot 0.05^2 + 0.5\cdot 0.3^2 = \mathbf{0.0573\ Kg\cdot m^2}$$

c) Como no existen fuerzas no conservativas, el trabajo de las fuerzas no conservativas es cero y por tanto la energía se conserva:



$$\Delta E = 0 \rightarrow E\ cte \rightarrow E_{c,i} + E_{p,i} = E_{c,f} + E_{p,f}$$

$$0 + 0 = \frac{1}{2}I_0\omega^2 - (M+M)g\left[\frac{L}{2} - \frac{L}{2}cos(60^o)\right]$$

$$\frac{1}{2}I_0\omega^2 = (M+M)g\left[\frac{L}{2} - \frac{L}{2}cos(60^o)\right]$$

$$\boldsymbol{\omega} = \sqrt{\frac{2Mg\frac{L}{2}[1-cos(60^o)]}{\frac{1}{2}I_0}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0.5\cdot 9.8\cdot \frac{0.4}{2}[1-cos(60^o)]}{\frac{1}{2}\cdot 0.0573}} = \mathbf{5.84\ rad/s}$$

MATEMÁTICAS I. EXAMEN ENERO 2017
GRADO EN ESTUDIOS DE ARQUITECTURA

ÁLGEBRA

EJERCICIO 1. Probar que la aplicación $f:\Re_2[x]\to M_2(\Re)$ dada por

$$f(p(x))=\begin{pmatrix} p(0) & p'(0) \\ p(1) & p'(1)\end{pmatrix}$$

Es lineal, hallar: $\ker f$, $\operatorname{Im} f$. Justificar si es inyectiva, ¿suprayectiva?

Obtener, si es posible, un subespacio suplementario de $\operatorname{Im} f$ respecto de $M_2(\Re)$

Solución:

La aplicación f es lineal $\Leftrightarrow$

1. $f(p(x)+q(x))=f(p(x))+f(q(x)) \quad \forall p(x),q(x)\in\Re_2[x]$

   Demostración:

   $$f(p(x)+q(x))=\begin{pmatrix} p(0)+q(0) & p'(0)+q'(0) \\ p(1)+q(1) & p'(1)+q'(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p(0) & p'(0) \\ p(1) & p'(1)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} q(0) & q'(0) \\ q(1) & q'(1)\end{pmatrix}=$$

   $$=f(p(x))+f(q(x))$$

2. $f(t\,p(x))=t\,f(p(x)) \quad \forall t\in\Re \quad \forall p(x)\in\Re_2[x]$

   Demostración:

   $$f(t\,p(x))=\begin{pmatrix} t\,p(0) & t\,p'(0) \\ t\,p(1) & t\,p'(1)\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} p(0) & p'(0) \\ p(1) & p'(1)\end{pmatrix}=t\,f(p(x))$$

Entonces, la aplicación f es lineal

$$\ker f=\left\{p(x)\in\Re_2[x]\,|\,f(p(x))=0_{M_2(\Re)}\right\}$$

Sea $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2 \quad \forall a_0,a_1,a_2\in\Re$. Entonces, $p'(x)=a_1+2a_2x$

$$\ker f=\left\{a_0+a_1x+a_2x^2\,|\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_0+a_1+a_2 & a_1+2a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}=\left\{a_0+a_1x+a_2x^2\,|\,a_0=a_1=a_2=0\right\}$$

$\ker f=\left\{0_{\Re_2[x]}\right\}\Rightarrow$ La aplicación lineal f es inyectiva.

$\dim\Re_2[x]=\dim\ker f+\dim\operatorname{Im} f\Rightarrow \dim\operatorname{Im} f=3\neq 4=\dim M_2(\Re)\Rightarrow$ La aplicación f NO es suprayectiva.

$$\operatorname{Im} f=\left\langle f(1),f(x),f(x^2)\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2\end{pmatrix}\right\rangle\Rightarrow \text{Base } \operatorname{Im} f=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2\end{pmatrix}\right\}$$

Sea S un subespacio suplementario de $\operatorname{Im} f$. Calcularemos una base de S completanto la base de $\operatorname{Im} f$ hasta obtener una base de $M_2(\Re)$. Por lo tanto, Base $S=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$

EJERCICIO 2. Se considera el endomorfismo f de $\Re^4$ definido mediante

$$f(x,y,z,t)=(3x,3y,3z+3t,0)$$

Se pide:

a) Obtener la matriz coordenada A de dicho endomorfismo con respecto de la base canónica

Solución:

$$\begin{cases} f(1,0,0,0) = (3,0,0,0) = 3(1,0,0,0) \\ f(0,1,0,0) = (0,3,0,0) = 3(0,1,0,0) \\ f(0,0,1,0) = (0,0,3,0) = 3(0,0,1,0) \\ f(0,0,0,1) = (0,0,3,0) = 3(0,0,1,0) \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Averiguar la base con respecto de la cual la ecuación del endomorfismo $Y = DX$, con *D* matriz diagonal.

Solución:

Valores propios: $|A - \lambda I_4| = 0$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(3-\lambda)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 & m(0) = 1 \\ \lambda = 3 & m(3) = 3 \end{cases}$$

El endomorfismo *f* es diagonalizable $\Leftrightarrow \dim S(3) = 3 = m(3)$

$$\dim S(3) = \dim \Re^4 - Rang(A - 3I_4)$$

$$(A - 3I_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang(A - 3I_4) = 1$$

Por lo tanto, $\dim S(3) = \dim \Re^4 - Rang(A - 3I_4) = 4 - 1 = 3 = m(3) \Rightarrow$ El endomorfismo *f* es diagonalizable.

Vectores propios: $(A - \lambda I_4)X = (0)$

- Si $\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t = 0, \quad \forall x, y, z$$

$$(x, y, z, t) = (x, y, z, 0) = x(1,0,0,0) + y(0,1,0,0) + z(0,0,1,0)$$

Por lo tanto, base $S = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)\}$

- Si $\lambda = 0$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ t = -z \quad \forall z \end{cases}$$

$$(x, y, z, t) = (0,0, z, -z) = z(0,0,1,-1)$$

Por lo tanto, base $S = \{(0,0,1,-1)\}$

Por lo tanto, Base $\Re^4 = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,1,-1)\}$ respecto de la cual la matriz coor-denada es diagonal.

Academia de Ingenierías y Arquitectura

$$\begin{cases} f(1,0,0,0) = (3,0,0,0) = 3(1,0,0,0) \\ f(0,1,0,0) = (0,3,0,0) = 3(0,1,0,0) \\ f(0,0,1,0) = (0,0,3,0) = 3(0,0,1,0) \\ f(0,0,1,-1) = (0,0,0,0) \end{cases} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Indicar la relación existente entre las matrices *A* y *D*.

Solución:

$f : \Re^4 \to \Re^4$, endomorfismo.
$u \mapsto f(u) = v$

Respecto a la base de $\Re^4$, $B_{\Re^4} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, tenemos la expresión matricial $Y = AX$

Respecto a la base de $\Re^4$, $\widetilde{B}_{\Re^4} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, tenemos la expresión matricial $\widetilde{Y} = D\widetilde{X}$

Sea $u \in \Re^4$, $u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 = X^t\left(\{e_i\}_{i=1}^4\right)$ y $u = \widetilde{x}_1v_1 + \widetilde{x}_2v_2 + \widetilde{x}_3v_3 + \widetilde{x}_4v_4 = \widetilde{X}^t\left(\{v_i\}_{i=1}^4\right)$

Por lo tanto, $X^t\left(\{e_i\}_{i=1}^4\right) = \widetilde{X}^t\left(\{v_i\}_{i=1}^4\right)$

Calculamos la relación entre las bases:

$$\begin{cases} v_1 = e_1 \\ v_2 = e_2 \\ v_3 = e_3 \\ v_4 = e_3 - e_4 \end{cases} \Leftrightarrow (v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4) = (v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\{v_i\}_{i=1}^4\right)^t = \left(\{e_i\}_{i=1}^4\right)^t P$$

Sustituimos en $X^t\left(\{e_i\}_{i=1}^4\right) = \widetilde{X}^t\left(\{v_i\}_{i=1}^4\right)$: $X^t\left(\{e_i\}_{i=1}^4\right) = \widetilde{X}^t P^t\left(\{e_i\}_{i=1}^4\right) \Leftrightarrow X^t = \widetilde{X}^t P^t$

Análogamente obtenemos, $Y^t = \widetilde{Y}^t P^t$:

Sea $f(u) = v \in \Re^4$:

$v = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 + y_4e_4 = Y^t\left(\{e_i\}_{i=1}^4\right)$ y $v = \widetilde{y}_1v_1 + \widetilde{y}_2v_2 + \widetilde{y}_3v_3 + \widetilde{y}_4v_4 = \widetilde{Y}^t\left(\{v_i\}_{i=1}^4\right)$

Por lo tanto, $Y^t\left(\{e_i\}_{i=1}^4\right) = \widetilde{Y}^t\left(\{v_i\}_{i=1}^4\right)$ y sustituyendo obtenemos $Y^t = \widetilde{Y}^t P^t$

Por último, sustituimos en la expresión matricial: $Y = AX$

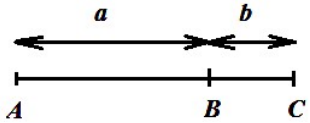
$P\widetilde{Y} = AP\widetilde{X} \Leftrightarrow \widetilde{Y} = P^{-1}AP\widetilde{X} = D\widetilde{X} \Leftrightarrow \underline{D = P^{-1}AP}$

GEOMÉTRIA

EJERCICIO 1. Definir lo que se entiende por proporción Áurea. Deducir su valor.

Solución:

Dado un segmento *AC*, *B* un punto intermedio cualquiera del mismo, se define la PROPORCIÓN AÚREA como la siguiente relación $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$



Deducimos su valor $\Phi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow 1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \text{ si } x = \frac{a}{b} \Rightarrow 1 + \frac{1}{x} = x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **Proporción Aúrea**, $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

EJERCICIO 2. Se considera la sucesión (u_n) definida de forma recurrente mediante

$$\begin{aligned} u_0 &= a, \quad u_1 = a\Phi \\ u_{n+1} &= u_n + u_{n-1} \end{aligned} \quad \forall n \in N \text{ siendo } \Phi \text{ la proporción áurea}$$

a. Utilizar el método de inducción para obtener el término general de la sucesión.

Solución:

$u_0 = a$, $u_1 = a\Phi$, $u_2 = a(1+\Phi)$, $u_3 = a(1+2\Phi)$, $u_4 = a(2+3\Phi)$, $u_5 = a(3+5\Phi)$,...,
$u_n = a(x_{n-2} + x_{n-1}\Phi)$

Esta sucesión $(x_n)_{n\in N}$ se llama sucesión de Fibonacci: $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$

Demostramos por inducción que $u_n = a(x_{n-2} + x_{n-1}\Phi)$ es su término general:

Sea $P_n = \{n \in N \mid u_n = a(x_{n-2} + x_{n-1}\Phi)\}$ donde $(x_n)_{n\in N}$ es la sucesión de Fibonacci definida anteriormente.

- Probamos que se cumple para $n = 2$ y para $n = 3$
  $u_2 = a(x_0 + x_1\Phi) = a(1+\Phi)$. Cierto
  $u_3 = a(x_1 + x_2\Phi) = a(1+2\Phi)$. Cierto
- Suponemos que se cumple hasta *n* y para $n-1$
- Demostramos que se cumple para $n+1$, es decir, $u_{n+1} = a(x_{n-1} + x_n\Phi)$
  Demostración:
  $u_{n+1} = u_n + u_{n-1} = a(x_{n-2} + x_{n-1}\Phi) + a(x_{n-3} + x_{n-2}\Phi) = a(x_{n-2} + x_{n-3} + (x_{n-1} + x_{n-2})\Phi) =$
  $= a(x_{n-1} + x_n\Phi)$, como queríamos demostrar.

Entonces $P_n = N$

b. Indicar qué proporción posee el rectángulo de lados u_{n+1} y u_n. ¿Y sus rectángulos recí-procos?

Solución:

Proporción de un rectángulo $\rho(a,b) = \dfrac{Máx(a,b)}{Mín(a,b)} \in \Re^+$.

Entonces, $\rho(u_{n+1}, u_n) = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{u_n + u_{n-1}}{u_n} = 1 + \dfrac{u_{n-1}}{u_n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = u = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{u_{n-1}}{u_n}\right) = 1 + \frac{1}{u} \Rightarrow u = 1 + \frac{1}{u} \Leftrightarrow u^2 - u - 1 = 0 \Leftrightarrow u = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Una de las propiedades de la proporción de un rectángulo es: La proporción de un rectángulo dado coincide con la de sus rectángulos recíprocos

CÁLCULO

EJERCICIO 1.

Obtener el polinomio de Mc-Laurin de grado 3, $p_{3,0}(f)$, para la función $f(x) = sen(3x)$

Comprobar que $p'_{3,0}(f) = p_{2,0}(f')$

Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - p_{3,0}(f)}{x^3}$

Solución:

Polinomio de Mc-Laurin de grado 3, $p_{3,0}(sen(3x))$,

$f(x) = sen(3x) \Rightarrow f(0) = 0$
$f'(x) = 3\cos(3x) \Rightarrow f'(0) = 3$
$f''(x) = -9sen(3x) \Rightarrow f''(0) = 0$
$f'''(x) = -27\cos(3x) \Rightarrow f'''(0) = -27$

$$p_{3,0}(sen(3x)) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 3x - \frac{9}{2}x^3$$

Comprobar que $p'_{3,0}(f) = p_{2,0}(f')$

$f(x) = sen(3x) \Rightarrow f'(x) = g(x) = 3\cos(3x)$

$$p_{2,0}(g(x)) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!}x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 = 3 - \frac{27}{2}x^2 = p'_{3,0}(f)$$

Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - p_{3,0}(f)}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - p_{3,0}(f)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{sen(3x) - 3x + \frac{9}{2}x^3}{x^3} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación.}$$

$$\overset{L'Hôp}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3\cos(3x) - 3 + \frac{27}{2}x^2}{3x^2} = \frac{0}{0} Ind \overset{L'Hôp}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-9sen(3x) + 27x}{6x} = \frac{0}{0} Ind$$

$$\overset{L'Hôp}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-27\cos(3x) + 27}{6} = 0$$

EJERCICIO 2. Hallar $f'(1)$ sabiendo que $f(x) = \frac{1}{x}\int_1^{x^2} [2t - f'(t)]dt$

Solución:

Sea $F(x) = \int_1^{x^2} [2t - f'(t)]dt$ función continua y derivable, $F(1) = \int_1^1 [2t - f'(t)]dt = 0$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}F(x) + \frac{1}{x}F'(x) \Rightarrow f'(1) = -F(1) + F'(1) = F'(1)$$

Por el teorema de fundamental del cálculo integral:

Suponemos $F(x) = \int_1^{x^2} [2t - f'(t)]dt$ continua y derivable en $[1,b)$, $b > 1$ y $g(t)$ continua $\forall c \in (1,b)$.

Entonces, $F'(x) = (2x^2 - f'(x^2))2x$

Si $F'(x) = (2x^2 - f'(x^2))2x$, entonces $F'(1) = 4 - 2f'(1)$

Sustituyendo en la ecuación $f'(1) = F'(1) \Rightarrow f'(1) = 4 - 2f'(1) \Leftrightarrow f'(1) = \frac{4}{3}$

EJERCICIO 3.

Se denomina catenaria a la forma que adopta un cable suspendido por sus extremos.

Bajo ciertas condiciones podemos suponer que la ecuación de la catenaria es $y = a\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}$ con $a \in \Re^+$.

Hallar la longitud de un arco de catenaria entre los puntos de abcisa -*a* y *a*.

Solución:

La longitud de un arco de catenaria $y = a\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}$ en $[-a,a]$: $L = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx$

$$y = a\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2} \Rightarrow y' = \frac{a}{2}\left(\frac{e^{x/a}}{a} - \frac{e^{-x/a}}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x/a} - e^{-x/a}\right) = Sh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$L = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + Sh^2\left(\frac{x}{a}\right)}dx = \int_{-a}^{a} \sqrt{Ch^2\left(\frac{x}{a}\right)}dx = \int_{-a}^{a} Ch\left(\frac{x}{a}\right)dx = a\left(Sh\left(\frac{x}{a}\right)\right)\Big|_{-a}^{a} =$$

$$a(Sh(1) - Sh(-1)) \underset{Shx \text{ función impar}}{=} a(Sh(1) + Sh(1)) = 2aSh(1) = a\left(e - e^{-1}\right) = a\frac{e^2 - 1}{e}$$

Academia de Ingenierías y Arquitectura
C / Miguel de Unamuno 17, local -Tel.976 512 839

www.imasaformacion.com
info@imasaformacion.com

La **Academia de Ingenierías y Arquitectura *i+A*** nace en 1998 con el nombre de ATU (Academia Técnica Universitaria), que conservó hasta el curso 2014/2015. Desde entonces, hemos estado apoyando a los estudiantes de las titulaciones de Ingeniería y Arquitectura a superar sus exámenes y a acabar con éxito sus estudios.

Nuestros cursos duran entre 30 y 40 horas, dependiendo de la asignatura. Los grupos tienen **entre 4 y 8 alumnos**, por lo que se compatibiliza el aprendizaje mutuo con una gran atención personalizada.

Contamos con una plantilla de profesorado compuesta por **jóvenes titulados** en Matemáticas, Física, Química y diferentes ramas de Ingeniería y Arquitectura, que conocen los temarios y tienen experiencia lectiva. Además disponemos de material recopilado durante todos estos años: ejercicios, exámenes, apuntes, resúmenes, …

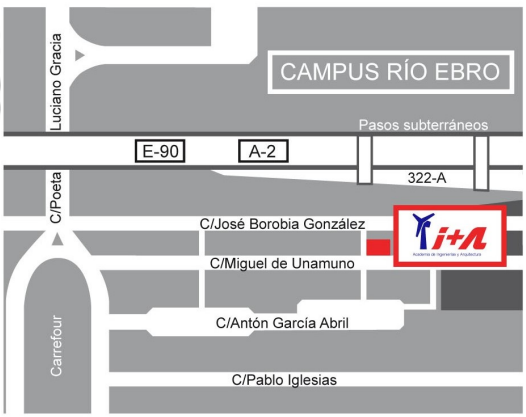
En *i+A*, los horarios los poneis el alumnado, para **adaptarlo a vuestras necesidades** (clases, actividades, deportes, trabajos…). Para ello, abrimos de 8:00 a 22:00 ininterrumpidamente.

Además de ser **la academia más cercana a la EINA**, a pocos minutos andando de tu centro de estudio, contamos con instalaciones acondicionadas tanto en invierno como en verano y un aula de descanso donde podrás incluso comer si lo necesitases.

Te ofrecemos, además, la posibilidad de **repetir gratis el curso** en caso de suspender tus exámenes. Si has venido a todas las clases del curso y aprobado la prueba de autocontrol que te plantearemos y, pese a ello, suspendes el examen en la universidad, podrás repetir el curso en la siguiente convocatoria (20 € en concepto de matrícula).

Con las clases universitarias, tu esfuerzo, y la ayuda que te prestaremos en *i+A*, puedes superar tus estudios con éxito.

Se forman nuevos grupos continuamente y durante todo el cuatrimestre. Si quieres tener la información más actualizada, llámanos, mándanos un WhatsApp al 616394605 o navega por nuestro blog en http://imasagrados.blogspot.com



C/ Miguel de Unamuno, 17-21 local
50018 Zaragoza
Tel/Fax: 976 512 839
info@imasaformacion.com
www.imasaformacion.com